Física Estadística – Hoja de Problemas 6

Problema 1

Sea la relación fundamental de la Termodinámica

$$d\bar{E} = T\,dS - \bar{P}\,dV + \mu\,d\bar{N}\ . \tag{1}$$

i) Muéstrese que para un gas clásico a volumen constate, *i.e.* $V = \text{fijo}$, la relación (1) implica que

$$\mu = -T\left(\frac{\partial S}{\partial \bar{N}}\right)_{\bar{E}}\ . \tag{2}$$

Nota: Recuerda que $\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y = -1\,.$

Discutir el signo del potencial químico μ cuando al gas clásico se le añade una partícula.

ii) Muéstrese que la función de partición gran canónica $\mathcal{Z}(\beta, z)$ para un gas ideal clásico no-relativista se puede expresar como

$$\mathcal{Z} = e^{z\,\frac{V}{\Lambda^3}}\ , \tag{3}$$

donde $z = e^{\beta\mu}$ es la fugacidad del gas y $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}\,\hbar$ es la longitud de onde de de Broglie.

iii) Calcular $\bar{N}(\beta, z)$ y obtener una expresión para $\mu(\beta, \bar{N}, V)\,.$

iv) Discutir el signo del potencial químico μ en función de si $\Lambda^3\,n > 1$ o $\Lambda^3\,n < 1$, donde $n = \frac{\bar{N}}{V}$ es la densidad del gas. ¿Qué caso corresponde al límite clásico y cuál al cuántico?

Problema 2

Sea un gas ideal tridimensional de partículas cuánticas de espín s, y sea ϵ_r la energía de un micro-estado $|r\rangle$ de una partícula en el gas. En el límite continuo, para una función arbitraria $g(\epsilon_r)$, se tiene que

$$\sum_r g(\epsilon_r) \simeq \int d\epsilon\ \ \omega(\epsilon)\ \ g(\epsilon)\ , \tag{4}$$

donde

$$\epsilon = c\,|\vec{k}|^\alpha \qquad \text{con} \qquad c = \text{cte}\ ,\ \ \alpha = \text{cte}\ , \tag{5}$$

es la energía de una partícula y $\omega(\epsilon)$ es la densidad de estados cuánticos asociada a un valor de la energía $\epsilon\,.$

i) Obtener la función $\omega(\epsilon)\,.$

ii) En el caso ultra-relativista ($\alpha = 1$), mostrar que la función de partición gran canónica satisface

$$\ln \mathcal{Z}(\beta, V, z) = \frac{8\pi\, V}{(2\pi\, c\, \beta)^3}\, g_s \sum_{k=1}^{\infty} (-\theta)^{k+1}\, \frac{z^k}{k^4} \qquad \text{para} \qquad z \ll 1 \ , \tag{6}$$

donde $g_s = 2s + 1$ es la degeneración de micro-estados asociada al espín s, z es la fugacidad del gas y el parámetro θ toma el valor $+1$ para fermiones y -1 para bosones.

Nota: $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, \dfrac{x^k}{k}$ para $|x| < 1$.

iii) Expresar la densidad $n = \dfrac{\bar{N}}{V}$ como una serie de potencias de la fugacidad z.

Problema 3

Sea un gas ideal tridimensional de partículas cuánticas de espín s y masa m, y sea ϵ_r la energía de un micro-estado $|r\rangle$ de una partícula en el gas. En el límite continuo, para una función arbitraria $g(\epsilon_r)$, se tiene que

$$\sum_r g(\epsilon_r) \simeq \int d\epsilon\ \omega(\epsilon)\ g(\epsilon)\ , \tag{7}$$

donde $\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m}\, |\vec{k}|^2$ es la energía (no-relativista) de una partícula y $\omega(\epsilon)$ es la densidad de estados cuánticos asociada a un valor de la energía ϵ.

i) Obtener la función $\omega(\epsilon)$.

ii) Mostrar que la función de partición gran canónica satisface

$$\ln \mathcal{Z}(\beta, V, z) = \frac{V}{\Lambda^3}\, g_s \sum_{k=1}^{\infty} (-\theta)^{k+1}\, \frac{z^k}{k^{\frac{5}{2}}} \qquad \text{para} \qquad z \ll 1 \ , \tag{8}$$

donde $g_s = 2s + 1$ es la degeneración de micro-estados asociada al espín s, z es la fugacidad del gas, $\Lambda = \sqrt{\dfrac{2\pi\beta}{m}}\, \hbar$ es la longitud de onde de de Broglie, y el parámetro θ toma el valor $+1$ para fermiones y -1 para bosones.

Nota: $\ln(1 + x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1}\, \dfrac{x^k}{k}$ para $|x| < 1$.

iii) Mostrar que, en el límite $z \ll 1$, la densidad de partículas $n = \dfrac{\bar{N}}{V}$ y la fugacidad se relacionan mediante

$$n = g_s\, \Lambda^{-3} \left(z - \frac{\theta}{2^{\frac{3}{2}}}\, z^2 + \frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}\, z^3 + \dots \right) \ . \tag{9}$$

iv) Mostrar que, en el límite $z \ll 1$, la ecuación de estado viene dada por

$$\bar{P}\, V = \bar{N}\, k_B\, T \left(1 + \frac{\theta}{2^{\frac{5}{2}}}\, n\, \Lambda^3\, g_s^{-1} + \dots \right) . \tag{10}$$

Comparar (y discutir) el resultado (10) con respecto a la ecuación de estado para el gas ideal clásico.

Problema 4

Sea un gas ideal tridimensional de partículas cuánticas relativistas con masa m y espín $s = 0$.

i) Obtener, a partir de primeros principios, la densidad de estados cuánticos $\omega(\epsilon)$ cuando la energía de una partícula viene dada por la expresión relativista

$$\epsilon = \sqrt{(m\, c^2)^2 + (c\, |\vec{p}\,|)^2}\ , \tag{11}$$

en términos de su energía en reposo $\epsilon_0 \equiv m\, c^2$, su momento lineal $\vec{p} = \hbar\, \vec{k}$ y la velocidad de la luz c.

ii) Evaluar la densidad de estados $\omega(\epsilon)$ obtenida en el apartado anterior en dos límites: el límite ultra-relativista (fotón) y el límite no-relativista (la energía de la partícula es mayormente energía en reposo).

Nota: $\epsilon\, \sqrt{\epsilon^2 - \epsilon_0^2} \approx \sqrt{2}\ \epsilon_0^{\frac{3}{2}}\ \sqrt{\epsilon - \epsilon_0} + \dots$ para $(\epsilon - \epsilon_0) \ll 1$.

Problema 5

Sea un gas ideal de partículas cuánticas no-relativistas con masa m y degeneración g_s. La energía de una partícula viene dada por la expresión no-relativista

$$\epsilon = \frac{\hbar^2 |\vec{k}\,|^2}{2m}\ , \tag{12}$$

en términos de su vector de onda $\vec{k}$ y su masa m.

i) Obtener, a partir de primeros principios, la densidad de estados cuánticos $\omega(\epsilon)$ para el caso de un gas tridimensional.

ii) Obtener, a partir de primeros principios, la densidad de estados cuánticos $\omega(\epsilon)$ para el caso de un gas bidimensional.

iii) Obtener, a partir de primeros principios, la densidad de estados cuánticos $\omega(\epsilon)$ para el caso de un gas unidimensional.

iv) Comparar y discutir razonadamente los resultados obtenidos en los tres apartados anteriores.

Problema 6

Sea un gas ideal de partículas cuánticas no-relativistas con espín s en D dimensiones. La energía de una partícula viene dada por la expresión

$$\epsilon = \frac{\hbar^2}{2m}|\vec{k}\,|^2 \ , \tag{13}$$

en términos del vector de onda $\vec{k}$ D-dimensional y de la masa de las partículas m. Obtener, a partir de primeros principios, la densidad de estados cuánticos $\omega(\epsilon)$.

Nota: El ángulo sólido en D dimensiones viene dado por $\Omega_D = \frac{2\,\pi^{\frac{D}{2}}}{\Gamma\left(\frac{D}{2}\right)}$. De esta expresión obtenemos $\Omega_{D=2} = 2\pi$, $\Omega_{D=3} = 4\pi$, etc.

Anexo: Integrales Gaussianas

Son integrales de la forma

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha\,x^2}\,x^p\,dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\,\alpha^{-\frac{p+1}{2}} \ , \tag{14}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned}
I(0) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}} \ , \\
I(1) &= \tfrac{1}{2}\,\alpha^{-1} \ , \\
I(2) &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{3}{2}} \ , \\
I(3) &= \tfrac{1}{2}\,\alpha^{-2} \ , \\
I(4) &= \tfrac{3}{8}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{5}{2}} \ , \\
I(5) &= \alpha^{-3} \ .
\end{aligned} \tag{15}$$