# Física Estadística – Hoja de Problemas 5

## Problema 1

Mostrar que el valor medio de la energía $\bar{\epsilon}_i$ (teorema de equipartición de la energía) asociada a un grado de libertad $p_i$ (equivalentemente $q_i$ ) cuya contribución al Hamiltoniano es de la forma

$$\epsilon_i = c\, {p_i}^{\alpha} \qquad \text{con} \qquad c\,,\, \alpha = \text{cte}\ , \tag{1}$$

viene dado por

$$\bar{\epsilon}_i = \tfrac{1}{\alpha}\, k\, T\ , \tag{2}$$

donde $k$ es la constante the Boltzmann.

Utilizar el resultado (2) para calcular el valor medio $\langle H \rangle$ de los siguientes Hamiltonianos :

*a)* $H = \dfrac{1}{2m}\left({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2\right)$

*b)* $H = \dfrac{1}{2m}\left({p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2\right) + m\, g\, z \qquad (m, g = \text{cte})$

*c)* $H = \dfrac{1}{2m}\left({p_x}^2 + {p_y}^2\right) + \dfrac{\kappa}{2}\left(x^2 + y^2\right) \qquad (m, \kappa = \text{cte})$

Utilizando la forma general del teorema de equipartición de la energía

$$\left\langle x_i\, \frac{\partial H}{\partial x_j} \right\rangle = \delta_{ij}\, k\, T \qquad \text{con} \qquad x_i = p_i\,,\, q_i\ , \tag{3}$$

determinar el valor medio $\langle H \rangle$ de los siguientes Hamiltonianos :

*d)* $H = \dfrac{1}{2m}\left({p_r}^2 + \dfrac{{p_\theta}^2}{r^2}\right) + \tfrac{1}{2}\, \kappa\, r^2 \qquad (m, \kappa = \text{cte})$

*e)* $H = c\, |\vec{p}\,| = c\, \sqrt{{p_x}^2 + {p_y}^2 + {p_z}^2} \qquad (c = \text{cte})$

## Problema 2

Sea una partícula no-relativista libre cuántica de masa $m$ en una caja de lados $L_x$ , $L_y$ y $L_z$ . La ecuación de Schrödinger (independiente del tiempo) viene dada por

$$\hat{H}\, |\psi_{\vec{n}}\rangle = E_{\vec{n}}\, |\psi_{\vec{n}}\rangle\ , \tag{4}$$

donde el Hamiltoniano de la partícula libre es

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} \qquad \text{con} \qquad \hat{p} = -i\, \hbar\, \nabla\ . \tag{5}$$

Imponiendo condiciones de contorno periódicas en los bordes de la caja, las soluciones a la ecuación (4) son de la forma

$$\psi_{\vec{n}} = e^{-i\vec{k}\,\vec{r}} \qquad \text{con} \qquad \vec{k} = \left(\tfrac{2\pi}{L_x}\, n_x\,,\, \tfrac{2\pi}{L_y}\, n_y\,,\, \tfrac{2\pi}{L_z}\, n_z\right) \qquad \text{y} \qquad \vec{n} = (n_x\,,\, n_y\,,\, n_z)\ , \tag{6}$$

donde $n_{x,y,z} = 0\,, \pm 1\,, \pm 2\,, \ldots$. Se tiene así que el discretizado de la variable $k_{x,y,z}$ viene dado en términos de la longitud $L_{x,y,z}$. Más concretamente,

$$\Delta k_{x,y,z} = \frac{2\pi}{L_{x,y,z}} \ , \tag{7}$$

de tal manera que

$$\Delta k_{x,y,z} \to 0 \qquad \text{cuando} \qquad L_{x,y,z} \to \infty \ . \tag{8}$$

Considerando (por simplicidad) una caja cúbica, *i.e.* $L_x = L_y = L_z \equiv L$, la energía de una solución $\psi_{\vec{n}}$ en (6) viene dada por

$$E_{\vec{n}} = \frac{h^2}{2\,m\,L^2}(n_x^2 + n_y^2 + n_z^2) \qquad \text{con} \qquad \hbar = \frac{h}{2\pi} \ . \tag{9}$$

*i*) Muéstrese que la contribución translacional a la función de partición de una partícula libre cuántica de masa $m$ viene dada por

$$Z(\beta, V) = \sum_{n_x,n_y,n_z} e^{-\beta\,E_{\vec{n}}} = \frac{V}{\Lambda^3} \ , \tag{10}$$

donde

$$\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}\ \hbar \ , \tag{11}$$

es la longitud de onda de de Broglie.

*ii*) A partir de la función de partición $Z(\beta, V)$ en (10), obténgase la energía libre (o potencial) de Helmholtz $F(T, V)$ así como la ecuación de estado del sistema.

**Nota importante:** Para una función $g(\vec{k}\,)$ de la variable discreta $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$, el límite al continuo (paso del sumatorio a la integral) se toma haciendo

$$\begin{aligned} \sum_{k_x,k_y,k_z} g(\vec{k}\,) \qquad &= \qquad \frac{1}{\Delta k_x\,\Delta k_y\,\Delta k_z} \sum_{k_x,k_y,k_z} \Delta k_x\,\Delta k_y\,\Delta k_z\ g(\vec{k}\,) \\ &\underset{L_{x,y,z}\to\infty}{\approx} \quad \frac{V}{(2\pi)^3} \int d^3\vec{k}\ g(\vec{k}\,) \ , \end{aligned} \tag{12}$$

donde $V = L_x\,L_y\,L_z$. Nótese que el paso de la primera línea a la segunda en (12) se hace tomando el límite $L_{x,y,z} \to \infty$. Esto se traduce en un discretizado infinitesimal del número de onda en (7), *i.e.* $\Delta k_{x,y,z} \to dk_{x,y,z}$, que a su vez permite reemplazar un sumatorio en una variable $\vec{k}$ (discreta) por una integral en una variable $\vec{k}$ (continua).

## Problema 3

Sea una partícula no-relativista libre cuántica de masa $m$ dentro de una caja de lado $L$ y volumen $V = L^D$ en un espacio con $D$ dimensiones espaciales. Los posibles microestados de la partícula se corresponden con los posibles valores (discretizados) del vector de onda $\vec{k}$ en $D$ dimensiones

$$k_{x_1} = \frac{2\pi}{L}\,n_{x_1} \quad , \quad k_{x_2} = \frac{2\pi}{L}\,n_{x_2} \quad \ldots \quad k_{x_D} = \frac{2\pi}{L}\,n_{x_D} \ , \tag{13}$$

con $n_{x_i} = 0\,,\ \pm 1\,,\ \pm 2\,,\ \ldots$ y tienen una energía asociada dada por

$$E_{(n_{x_1}\,, n_{x_2}\,, \cdots\,, n_{x_D})} = \frac{\hbar^2}{2m}\, |\vec{k}|^2\ . \tag{14}$$

*i*) Mostrar que la función de partición (canónica) traslacional viene dada por

$$Z(\beta, V) = \left(\frac{L}{\Lambda}\right)^D \tag{15}$$

donde $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}\,\hbar$ es la longitud de onda de de Broglie a temperatura $\beta = \frac{1}{k_B T}$ donde $k_B$ es la constante de Boltzmann.

*ii*) Calcular la energía libre de Helmholtz y la ecuación de estado.

*iii*) Calcular la entropía y la capacidad calorífica a volumen constante $C_V$ .

## Problema 4

Sea un gas ideal tridimensional clásico compuesto de partículas no-relativistas idénticas de masa $m$ contenidas en un recinto de volumen $V$ a la temperatura $T$. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H_{\text{no-rel}} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i|^2\ , \tag{16}$$

donde $\vec{p}_i$ es el momento lineal de la partícula $i$-ésima. Utilizando la colectividad gran canónica (número de partículas $N$ indefinido) para modelizar el gas clásico:

*i*) Mostrar que

$$\mathcal{Z}(\beta, V, z) = e^{z\,\frac{V}{\Lambda^3}}\ , \tag{17}$$

donde $\Lambda = \sqrt{\frac{2\pi\beta}{m}}\,\hbar$ es la longitud de onda de de Broglie a temperatura $\beta = \frac{1}{k_B T}$ y $z$ es la fugacidad del gas.

**Nota:** Si se desea se pueden utilizar los resultados obtenidos en los Problemas 2 y 3.

*ii*) Calcular el valor medio $\bar{N}$ y la dispersión cuadrática media $\overline{(\Delta N)^2}$ del número de partículas.

*iii*) Expresar la fugacidad $z$ en términos de la densidad de partículas $n = \frac{\bar{N}}{V}$ .

## Problema 5

Sea un gas ideal tridimensional clásico compuesto de $N \gg 1$ partículas ultra-relativistas idénticas (con masa $m = 0$) contenidas en un recinto de volumen $V$ a la temperatura $T$. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H_{\text{ultra-rel}} = c \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i|\ , \tag{18}$$

donde $\vec{p}_i$ es el momento lineal (tridimensional) de la partícula $i$-ésima y la constante $c$ es la velocidad de la luz.

*i)* Determinar la función de partición canónica del sistema ($N \equiv$ fijo).

*ii)* Calcular la energía media, la ecuación de estado, la entropía (discutir el límite $T \to 0$) y la capacidad calorífica a volumen constante $C_V$ del gas a partir de la función de partición.

*iii)* Repetir los apartados *i)* y *ii)* para el caso de un gas de partículas no-relativistas de masa $m$ con Hamiltoniano

$$H_{\text{no-rel}} = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i|^2 \ . \tag{19}$$

Comparar la energía media y la ecuación de estado obtenidas con respecto al caso ultra-relativista.

**Nota:** Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

## Problema 6

Sea un gas ideal clásico tridimensional compuesto de $N \gg 1$ ($N =$ fijo) partículas idénticas contenidas en un recinto de volumen $V$ ($V =$ fijo) a la temperatura $T$. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = \lambda \sum_{i=1}^{N} |\vec{p}_i|^{\alpha} \ , \tag{20}$$

donde $\vec{p}_i$ es el momento lineal (tridimensional) de la partícula $i$-ésima, y donde $\lambda > 0$ y $\alpha > 0$ son dos constantes que especifican el gas.

*i)* Determinar la función de partición $Z$ del gas.

**Nota:** Integral Gaussiana: $I(p) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-\gamma x^2} x^p \, dx = \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \gamma^{-\frac{p+1}{2}}$ .

*ii)* Calcular la densidad de energía media $\rho = \bar{E}/V$, la ecuación de estado, la entropía (discutir el límite $T \to 0$) y la capacidad calorífica a volumen constante $C_V$ del gas a partir de la función de partición.

**Nota:** Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

*iii)* En Cosmología se caracteriza el contenido de materia/energía del Universo mediante tres tipos de gases ideales (o fluidos perfectos) que satisfacen una ecuación del tipo

$$\bar{P} = w \, \rho \ , \tag{21}$$

donde $\bar{P}$ es la presión, $\rho = \bar{E}/V$ es la densidad de energía media y $w$ es una constante que puede tomar los valores:

$$w = 0 \quad , \quad w = \frac{1}{3} \quad , \quad w = -1 \; . \tag{22}$$

Cada uno de los tres valores en (22) corresponde a un tipo de materia/energía presente en el Universo. ¿Qué valor de $w$ corresponde a materia caliente (o radiación), cuál a materia fría (o polvo estático) y cuál a un tipo exótico de energía conocida como energía oscura? Discutir y justificar la respuesta a la luz de los resultados de los apartados anteriores.

*iv*) Re-derivar la energía media utilizando el teorema de equipartición de la energía con el Hamiltoniano (20). ¿Aplicaría este teorema al caso de la energía oscura del apartado anterior? En caso negativo, ¿qué patologías identificas? Discutir y justificar las respuestas a la luz de los resultados de los apartados anteriores.

## Problema 7

Una partícula clásica no-relativista de masa $m$ se mueve en el eje $x$ bajo el efecto de una fuerza conservativa con un potencial

$$V(q) = \begin{cases} \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, (q+a)^2 & \text{para} \quad q \leq -a \\ 0 & \text{para} \quad -a < q < a \\ \frac{1}{2}\, m\, \omega^2\, (q-a)^2 & \text{para} \quad q \geq a \end{cases} \tag{23}$$

donde $a > 0$ es una constante positiva.

*i*) Escribir el Hamiltoniano uni-dimensional del sistema y determinar la función de partición canónica.

*ii*) Calcular la energía media y la capacidad calorífica del sistema a partir de la función de partición

*iii*) Discutir razonadamente el límite $a \to 0$.

## Problema 8

Sea un gas ideal clásico tridimensional no-relativista compuesto de dos tipos de partículas distintas. El gas contiene $N_A \gg 1$ partículas (idénticas) de tipo A con masa $m_A$ y $N_B \gg 1$ partículas (idénticas) de tipo B con masa $m_B$ en un recinto de volumen $V$ a la temperatura $T$. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = H_A + H_B = \sum_{i=1}^{N_A} \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m_A} + \sum_{i=1}^{N_B} \frac{|\vec{p}_i|^2}{2m_B} \; , \tag{24}$$

donde $\vec{p}_i$ es el momento lineal (tridimensional) de la partícula $i$-ésima.

*i*) Determinar la función de partición $Z$ del gas y expresarla en términos de las longitudes de onda características $\Lambda_A = \sqrt{\dfrac{\beta h_0^2}{2\pi m_A}}$ y $\Lambda_B = \sqrt{\dfrac{\beta h_0^2}{2\pi m_B}}$ de las componentes del gas.

*ii*) Calcular la energía libre de Helmholtz $F$ y la ecuación de estado del gas.

**Nota:** Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

*iii*) Calcular la entropía $S$ del gas y expresarla de la forma

$$S = S_A(N_A, \Lambda_A, V) + S_B(N_B, \Lambda_B, V) \ . \tag{25}$$

*iv*) Calcular la entropía de mezcla del gas, la cual se define como

$$S_{\text{mezcla}} \equiv S - S_0 \ , \tag{26}$$

donde $S_0$ es la entropía de un gas a temperatura $T$ y volumen $V$ que contiene $N = N_A + N_B$ partículas (idénticas) de un único tipo con masa $m$ y longitud de onda característica $\Lambda = \sqrt{\dfrac{\beta h_0^2}{2\pi m}}$.

*v*) Mostrar que la entropía de mezcla del gas se puede expresar como

$$S_{\text{mezcla}} = -Nk \left[ \Phi \ \ln\left(\frac{\Lambda_A^3}{\Lambda^3}\,\Phi\right) - (1-\Phi)\ \ln\left(\frac{\Lambda_B^3}{\Lambda^3}\,(1-\Phi)\right)\right] \ , \tag{27}$$

en términos de un parámetro de mezcla $\Phi \equiv \frac{N_A}{N_A+N_B}$. Discutir razonadamente los casos límite $N = N_A$ y $N = N_B$ cuando $m_A = m_B = m$.

## Problema 9

Sea un gas clásico unidimensional compuesto de $N \gg 1$ ($N =$ fijo) partículas idénticas no-relativistas de masa $m$ moviéndose en un segmento de longitud $L$ ($L =$ fijo) a la temperatura $T$ en presencia de un potencial de interacción

$$V(q) = -c \log\left(\frac{q}{L_0}\right) \ . \tag{28}$$

El Hamiltoniano unidimensional del gas viene dado por

$$H = \sum_{i=1}^{N} \frac{p_i^2}{2m} - c \log\left(\frac{q_i}{L_0}\right) \ , \tag{29}$$

donde $q_i \in [0, L]$ denota la coordenada (unidimensional) de la partícula $i$-ésima, $p_i$ es su momento lineal, y donde $L_0 > 0$ y $c > 0$ son dos constantes que especifican el gas.

*i*) Determinar la función de partición $Z$ del gas y la energa libre de Helmholtz.

*ii*) Obtener la ecuación de estado del gas y discutir razonadamente el comportamiento de la presión $P$ en el límite $T \to 0$. ¿Qué diferencia observas con respecto al caso de un gas ideal de partículas libres (justificar la respuesta)?

## Problema 10

Sea un sistema estadístico cuántico con $N$ estados posibles con energías

$$E_n = n\,\varepsilon \qquad , \qquad n = 0, \dots, N-1 \ , \tag{30}$$

donde $\varepsilon > 0$, y conectado a una reserva de calor a temperatura $T$.

*i*) Calcular la función de partición $Z$ del sistema y la probabilidad $P(E_n)$ de que el sistema se encuentre en un estado con energía $E_n$.

**Nota:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad , \quad \sum_{n=N}^{\infty} x^n = x^N \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{x^N}{1-x}$ para $x < 1$.

*ii*) Determinar la energía media $\bar{E}$ del sistema.

*iii*) Discutir razonadamente el límite $N, T \to \infty$. ¿Qué sistema de los estudiados en el curso se recupera en este límite?.

## Problema 11

Sea un sistema estadístico cuántico compuesto de $N$ partículas libres y distinguibles. Cada partícula tiene niveles de energía dados por

$$\varepsilon_n = n\,\varepsilon \qquad , \qquad n = 0, 1, 2, \dots, \infty \ , \tag{31}$$

donde $\varepsilon > 0$ y degeneración $g_n = n + 1$.

*i*) Calcular la función de partición $Z$ del sistema.

**Nota:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ para $x < 1$.

*ii*) Determinar la energía media $\bar{E}$ del sistema.

*iii*) Calcular las fluctuaciones de la energía $\overline{(\Delta E)^2}$.

## Problema 12

Sea una cadena compuesta de tres spines $s = \frac{1}{2}$ cada uno con dos posibles orientaciones $\sigma_i = \{+1, -1\}$ a temperatura $T$. Considérese una interacción entre primeros vecinos de tal manera que el Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = -J \sum_{i,j}^{\text{pares}} \sigma_i \sigma_j \ , \tag{32}$$

donde $J > 0$ es una constante. Determinar la función de partición $Z$.

**Nota:** $1 + \cosh(2x) = 2\cosh^2(x)$.

## Problema 13

Considérese un oscilador armónico en $D$ dimensiones con una única frecuencia de oscilación $\omega$ (la misma en las $D$ direcciones).

**2.1** Estudio *clásico* del sistema :

El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = \frac{|\vec{p}\,|^2}{2\,m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,|\vec{x}\,|^2 \,. \tag{33}$$

*i*) Determinar la función de partición canónica del sistema.

*ii*) Calcular la energía media, la entropía (discutir el límite $T \to 0$ ) y el calor específico del sistema a partir de la función de partición.

**2.2** Estudio *cuántico* del sistema :

Sabiendo que en el caso unidimensional $(D = 1)$ los autovalores del Hamiltoniano $E_n$ (niveles de energía) están cuantizados $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ y vienen dados por

$$E_n = \hbar\,\omega\,\left(n + \frac{1}{2}\right) \;, \tag{34}$$

*iii*) Determinar los autovalores del Hamiltoniano $E_{n_1,n_2,\ldots,n_D}$ (niveles de energía) para el oscilador armónico en $D$ dimensiones.

*iv*) Determinar la función de partición canónica del sistema.

*v*) Calcular la energía media y el calor específico del sistema a partir de la función de partición.

*vi*) Evaluar la energía media del sistema en los límites $\beta^{-1} \ll \hbar\,\omega$ y $\beta^{-1} \gg \hbar\,\omega$ . ¿Cuál es la interpretación física de ambos límites?

*vii*) ¿Cuál es la energía y la degeneración del primer estado excitado? Calcular el cociente entre las probabilidades de que el oscilador esté en el primer estado excitado y de que esté en su estado fundamental. Discutir los límites $\beta^{-1} \ll \hbar\,\omega$ y $\beta^{-1} \gg \hbar\,\omega$ e interpretar los resultados.

**Nota:** $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \qquad \text{para} \qquad x < 1\,.$

## Problema 14

Sea un gas ideal tridimensional de $N$ partículas clásicas no-relativistas de masa $m$ . Utilizando la colectividad canónica, la función de distribución de probabilidad de encontrar a alguna de las partículas del gas en una posición entre $\vec{r}$ y $\vec{r} + d\vec{r}$ con momento entre $\vec{p}$ y $\vec{p} + d\vec{p}$ viene dada por

$$f(\vec{r},\vec{p})\,d\vec{r}\,d\vec{p} \;=\; C\,\left(\frac{d\vec{r}\,d\vec{p}}{h_0^3}\right)\,e^{-\beta\frac{|\vec{p}\,|^2}{2m}} \;, \tag{35}$$

donde $h_0$ es el tamaño de la celda del espacio de fases y $C$ es una constante de normalización.

*i*) Determinar la constante de normalización $C$.

*ii*) Determinar la función de distribución de probabilidad $f(p_x)$ para la componente $p_x$ del momento y calcular $\langle p_x \rangle$

*iii*) Determinar la función de distribución de probabilidad $f(|\vec{p}\,|)$ del módulo del momento y utilizarla para calcular $\langle |\vec{p}\,| \rangle$.

## Problema 15

Considérese un sistema compuesto por $N$ átomos de espín $s = 1$ interactuando con un campo magnético externo $\vec{B}$ el cual apunta en la dirección del eje $z$. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = \sum_{i=1}^{N} H_i \qquad \text{con} \qquad H_i = -g\,\mu_0\,\vec{B}\cdot\vec{S}_i \ , \tag{36}$$

donde $\vec{S}_i$ es el vector del espín del átomo $i$-ésimo, $g$ es una constante conocida como el factor $g$ de Landé y $\mu_0$ es otra constante conocida como el magnetón de Bohr.

*i*) Determinar la función de partición canónica del sistema.

*ii*) Calcular la magnetización de la sustancia $M(T)$ en función de la temperatura. Evaluar la magnetización en los límites $T \to 0^+$ y $T \to \infty$. ¿Cuál es la interpretación física de ambos límites?

*iii*) Calcular la energía media de la sustancia $\bar{E}(T)$ en función de la temperatura. Evaluar la energía media en los límites $T \to 0^+$ y $T \to \infty$. ¿Cuál es la interpretación física de ambos límites?

**Nota:** $\sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \quad , \quad \cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{2}$.

## Problema 16

Sea un gas ideal de $N$ partículas distinguibles a temperatura $T$. El sistema es tal que cada partícula del gas sólo puede estar en dos posibles niveles de energía los cuales denoteremos $\epsilon_1$ y $\epsilon_2$ con $\Delta \equiv \epsilon_2 - \epsilon_1 > 0$.

*i*) Determinar la función de partición canónica del sistema y la energía libre de Helmholtz.

*ii*) Calcular la energía media del sistema $\bar{E}(T)$ en función de la temperatura. Evaluar la energía media en los límites $T \to 0^+$ y $T \to \infty$. ¿Cuál es la interpretación física de ambos límites?

### Anexo: Integrales Gaussianas

Son integrales de la forma

$$I(p) = \int_0^\infty e^{-\alpha\, x^2}\, x^p\, dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\,\alpha^{-\frac{p+1}{2}}\ , \tag{37}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} I(0) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\ , \\ I(1) &= \tfrac{1}{2}\,\alpha^{-1}\ , \\ I(2) &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{3}{2}}\ , \\ I(3) &= \tfrac{1}{2}\,\alpha^{-2}\ , \\ I(4) &= \tfrac{3}{8}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{5}{2}}\ , \\ I(5) &= \alpha^{-3}\ . \end{aligned} \tag{38}$$