Física Estadística – Hoja de Problemas 3

Problema 1

A partir de la función

$$\begin{aligned} \Omega(E, x_\alpha) \;\; \equiv \;\; & \text{Número de micro-estados con energía entre } E \text{ y } E + \delta E \quad (1) \\ & \text{y parámetros externos } x_\alpha \quad (2) \end{aligned}$$

deducir las relaciones de Maxwell

$$\frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial E} \quad , \quad \frac{\bar{P}}{T} = \frac{\partial S}{\partial V} \quad , \quad \frac{\bar{\mu}}{T} = \frac{\partial S}{\partial N} \, , \tag{3}$$

para un sistema con parámetros externos $x_\alpha = (V, N)$.

Problema 2

Considérese un gas A que interacciona con un *dispositivo mecánico* (sin grados de libertad) A' compuesto de un pistón unido a un muelle con constante k cuya energía potencial elástica E' es función de un parámetro externo de desplazamiento x , *i.e.* $E' = E'(x) = \frac{1}{2}\, k\, x^2$.

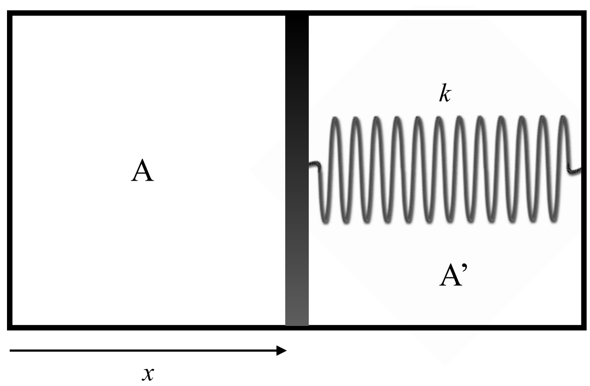

Figure 1: Esquema del dispositivo mecánico: sistemas A y A' .

Muéstrese que, en el equilibrio, la fuerza media por unidad de área del pistón (presión $\bar{P}$) ejercida por el gas debe ser igual a la fuerza ejercida por el muelle (ley de Hooke).

Problema 3

Sea un sistema compuesto por N átomos magnéticos con espín $s = \frac{1}{2}$, del cual sabemos que tiene un comportamiento ferromagnético. Esto es:

- $T \to 0$: todos los espines están alineados
- $T \to \infty$: los espines están orientados aleatoriamente con igual probabilidad de estar en cualquiera de sus dos micro-estados $|\uparrow\rangle$ o $|\downarrow\rangle$.

Calcular ΔS cuando el sistema evoluciona de $T \to 0$ a $T \to \infty$. ¿Depende el resultado de los detalles del proceso?

Problema 4

Sea un sistema estadístico compuesto de $N \gg 1$ partículas independientes y distiguibles. Cada una de estas partículas tiene únicamente dos niveles de energía: $E_0 = 0$ y $E_1 = \varepsilon > 0$. Utilizando la Termodinámica Estadística:

i) Determinar la entropía $S(m, N)$ donde m es el número de partículas con energía ε.

ii) Determinar la expresión de la energía total del sistema $E(T)$ en función de la temperatura T.

iii) Discutir razonadamente los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$.

Nota: Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

Problema 5

Sea un sistema estadístico compuesto de $N \gg 1$ partículas independientes y distiguibles. Cada una de estas partículas tiene dos posibles niveles de energía: $E_0 = 0$ y $E_1 = \varepsilon > 0$. El nivel excitado tiene degeneración d (hay d configuraciones con el mismo valor de la energía E_1) mientras que el nivel fundamental es no degenerado (hay una única configuración con energía E_0). La energía total del sistema viene dada por $E = m\,\varepsilon$ donde $m \leq N$ es el número de partículas con energía ε.

Utilizando la Termodinámica Estadística:

i) Determinar el número de microestados $\Omega(E)$ correspondientes a un macroestado del sistema con energía E.

ii) Mostrar que la entropía se puede expresar en términos de $x = \frac{m}{N}$ como

$$S(x, N) = k\,N\,\left[\,x \log d - x \log x - (1-x)\log(1-x)\,\right]\,, \tag{4}$$

donde k es la constante de Boltzmann.

iii) Determinar la energía total del sistema $E(T)$ en función de la temperatura T.

iv) Calcular la razón n_1/n_0 entre los números de ocupación de los dos niveles de energía como función de T y de ε. Discutir razonadamente los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$.

Nota: Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

Problema 6

Sea un sistema compuesto de $N \gg 1$ osciladores armónicos unidimensionales clásicos. El Hamiltoniano del sistema viene dado por

$$H = \sum_{i=1}^{N} \left[\frac{p_i^2}{2m} + \frac{1}{2}\,m\,\omega^2\,x_i^2\right]\,, \tag{5}$$

donde (p_i, x_i) denotan el momento y la posición del oscilador i-ésimo, m es la masa de los osciladores y ω es la frecuencia de oscilación (la misma para todos).

Estudiando el sistema dentro del marco de la Termodinámica Estadística:

i) Calcular el número de microestados $\Omega(E)$ en función de la energía E del sistema.

Nota: En el límite $N \to \infty$, las integrales restringidas a una corteza esférica (de anchura infinitesimal δE) en el espacio de fases $2N$-dimensional, se pueden aproximar por integrales en el volumen de la esfera sólida (bola) $2N$-dimensional contenida. Esto es:

$$\int_{E \leq H \leq E+\delta E} dx_1 \cdots dx_N \, dp_1 \cdots dp_N \approx \int_{0 \leq H \leq E} dx_1 \cdots dx_N \, dp_1 \cdots dp_N \; . \tag{6}$$

El error cometido al hacer esta aproximación decrece como $\frac{1}{N}$.

Nota: El volumen de una esfera sólida (bola) $2N$-dimensional de radio R viene dado por la fórmula $V_{2N}(R) = \dfrac{\pi^N}{N!} R^{2N}$.

ii) Calcular la entropía de Boltzmann del sistema y la expresión de la energía en función de la temperatura $E(T)$.

Nota: Fórmula de Stirling: $\ln N! \approx N \ln N - N$ para $N \gg 1$.

iii) Comparar el resultado obtenido para $E(T)$ en el apartado anterior con el que se obtiene al tomar el límite clásico del resultado para N osciladores armónicos unidimensionales cuánticos

$$E(T) = N \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta \hbar \omega} - 1} \right) \; . \tag{7}$$

Nota: $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$.

Nota: La ecuación (7) se puede escribir también como $E(T) = \dfrac{N \hbar \omega}{2} \coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)$.

Problema 7

Considérese un sistema de $N \gg 1$ osciladores armónicos unidimensionales todos con la misma frecuencia ω interaccionando débilmente. Utilizando la Termodinámica Estadística, obténgase la expresión de la energía como función de la temperatura, *i.e.* $E(T)$, y discútanse los límites $T \to 0$ y $T \to \infty$.

Nota: Los niveles de energía E_n de un oscilador están cuantizados y vienen dados por

$$E_n = \hbar \omega \left(\frac{1}{2} + n \right) \; , \tag{8}$$

donde n es el número de excitación del oscilador.

Nota: El número de posibles maneras de repartir n bolas idénticas en N cajas numeradas es

$$\begin{pmatrix} n + N - 1 \\ N - 1 \end{pmatrix} \; . \tag{9}$$

Problema 8

Un sistema aislado está formado por dos cajas cúbicas de lado L que están en contacto por una de sus caras.

i) En el instante inicial la caja I contiene dos partículas distinguibles con $E_{\text{tot}}^{\text{I}} = 12E_0$ mientras que la caja II contiene una partícula con $E_{\text{tot}}^{\text{II}} = 9E_0$, donde $E_0 \equiv \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$ y siendo m la misma masa para las tres partículas. Calcular el número de microestados del sistema si la pared que separa las dos cajas es adiabática, fija e impermeable.

ii) Calcular el número de microestados del sistema si se retira la pared que separa las dos cajas.

Nota: En física cuántica, el problema de una partícula en una caja de lados L_x, L_y y L_z tiene soluciones etiquetadas por tres enteros $n_x > 0$, $n_y > 0$ y $n_z > 0$. El valor de la energía para estas soluciones viene dado por $E = \frac{\pi^2\hbar^2}{2m}(\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2} + \frac{n_z^2}{L_z^2})$.

Problema 9

Sea un sistema estadístico clásico con energía E compuesto de dos partículas *ultrarrelativistas* moviéndose en un segmento unidimensional de longitud L.

i) Determinar el Hamiltoniano del sistema.

Utilizando la Termodinámica Estadística:

ii) Determinar el número de microestados $\Omega(E)$ correspondientes a un macroestado del sistema con energía E.

iii) Calcular la entropía del sistema y la ecuación de estado. Determinar también la expresión de la energía $E(T)$ en función de la temperatura T.