Física Estadística – Hoja de Problemas 2

Problema 1

Dos borrachos comienzan a caminar a la vez (con pasos de igual longitud y simultáneos) desde una farola con la misma probabilidad de dar un paso a la derecha que de darlo a la izquierda. Calcular la probabilidad de que se encuentren otra vez al cabo de N pasos.

Problema 2

Consideremos el problema del camino aleatorio con $p = q$ en términos de la variable $m = n_1 - n_2$. Después de un total de N pasos, calcular los valores medios: $\overline{m}$, $\overline{m^2}$, $\overline{m^3}$ y $\overline{m^4}$.

Nota: $\sum_{k=0}^{N} \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 2N \\ N \end{pmatrix}$.

Problema 3

Obtener la función de distribución Gaussiana a partir de la función de distribución de Poisson en el límite $n_1 \gg 1$, $\lambda \gg 1$ y $(n_1 - \lambda)/\lambda \ll 1$.

Nota: $n! \to \sqrt{2\,\pi\,n}\,e^{-n}\,n^n$ cuando $n \to \infty$ (fórmula de Stirling).

Problema 4

Sea una variable aleatoria $x \in \mathbb{R}$ sujeta a la función de distribución Gaussiana

$$\mathcal{P}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \,, \tag{1}$$

la cual está especificada en términos de dos parámetros (μ, σ).

a) Comprobar que $\mathcal{P}(x)$ está normalizada a la unidad.

b) Calcular el momento cero de la distribución $\overline{x}$.

c) Calcular el segundo momento de la distribución (o dispersión) $\overline{(x - \bar{x})^2}$.

Integrales Gaussianas

Son integrales de la forma

$$I(p) = \int_0^{\infty} e^{-\alpha\, x^2}\, x^p\, dx = \frac{1}{2}\,\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)\,\alpha^{-\frac{p+1}{2}} \,, \tag{2}$$

de tal manera que

$$
\begin{aligned}
I(0) &= \tfrac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{1}{2}}\ , \\
I(1) &= \tfrac{1}{2}\,\alpha^{-1}\ , \\
I(2) &= \tfrac{1}{4}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{3}{2}}\ , \\
I(3) &= \tfrac{1}{2}\,\alpha^{-2}\ , \\
I(4) &= \tfrac{3}{8}\sqrt{\pi}\,\alpha^{-\frac{5}{2}}\ , \\
I(5) &= \alpha^{-3}\ .
\end{aligned}
\tag{3}
$$